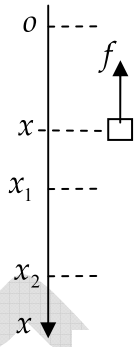
功 动能定理

1. 建立如图所示坐标系，ox 轴竖直向下为正方向。设第一次敲打后钉子从坐标原点 o 处打入到 $x_1 = 10\text{cm}$ 处，第二次敲打后从 x_1 处打入到 x_2 处；



（第 1 题图）

铁锤敲打钉子瞬间，铁锤和钉子构成的系统动量近似守恒：

$Mv_0 = (m+M)v \quad \Rightarrow$ 敲打后钉子的初速度大小：$v = \dfrac{M}{m+M} v_0$，

由于钉子质量很小（$m << M$），$\Rightarrow \quad v \approx v_0$，即**两次敲打后钉子获得相同的初速度** v_0；

钉子敲入木板过程中受到阻力 $f = -kx$ 作用，由于钉子质量很小，**忽略重力的影响**。

在任一位置 x 处发生一小段位移 dx，方向沿 x 轴正方向向下，阻力 $f = -kx$，方向向上，

则元功：$dW = \vec{f} \cdot d\vec{r} = -kxdx$；

（1）从原点 o 到 $x_1 = 10\text{cm}$ 处，阻力做功：$W_{f1} = \int_0^{x_1} -kxdx = 0 - \dfrac{1}{2}mv_0^2$，$\Rightarrow \quad -\dfrac{1}{2}kx_1^2 = -\dfrac{1}{2}mv_0^2$；

（2）从 x_1 处打入到 x_2 处，阻力做功：$W_{f2} = \int_{x_1}^{x_2} -kxdx = 0 - \dfrac{1}{2}mv_0^2$，$\Rightarrow \quad -\dfrac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2) = -\dfrac{1}{2}mv_0^2$；

由（1）（2）得 $-\dfrac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2) = -\dfrac{1}{2}kx_1^2$，$\quad \Rightarrow \quad x_2^2 = 2x_1^2$，$\Rightarrow \quad x_2 = \sqrt{2}x_1$；

那么**第二次敲入深度为**：$\Delta x = x_2 - x_1 = (\sqrt{2}-1)x_1 = (1.41-1)\times 1.00\text{cm} = 0.41\text{cm}$.　　**本题选（A）**

2. 物体在提升过程中受到提升力 F（方向竖直向上）和重力 mg（方向竖直向下）作用，

由质点动能定理，质点所受外力做功之和等于质点动能的增量：$W_F - mgh = \dfrac{1}{2}mv^2 - \dfrac{1}{2}mv_0^2$，

$\Rightarrow$ 提升力所做的功：$W_F = mgh + \dfrac{1}{2}mv^2 - \dfrac{1}{2}mv_0^2$，　　**本题选（D）**

可知，若物体匀速提升，$W_F = mgh$；若物体加速提升，$v > v_0$，$W_F > mgh$；**若物体减速提升**，$W_F < mgh$.

3. 由图，子弹的阻力大小与进入深度 x 的关系：$F = \begin{cases} 1000000x(\text{N}) & (0 \le x < 0.02\text{m}) \\ 20000\text{N} & (x \ge 0.02\text{m}) \end{cases}$，方向与运动方向相反；

可先讨论子弹从 $x_0 = 0$ 到 $x_1 = 0.02\text{m}$ 的过程，阻力做负功：$W_{F1} = -\int_0^{0.02} 1000000xdx = -200\text{J}$；

又已知子弹的初动能：$E_{k0} = \dfrac{1}{2}mv_0^2 = \dfrac{1}{2}\times 0.02 \times (200)^2 = 400\text{J}$，

由动能定理：$W_{F1} = \dfrac{1}{2}mv^2 - \dfrac{1}{2}mv_0^2 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{2}mv^2 = \dfrac{1}{2}mv_0^2 + W_{F1} = 400\text{J} - 200\text{J} = 200\text{J}$，

$\Rightarrow$ 子弹的末动能：$\dfrac{1}{2}mv^2 = 200\text{J} > 0$，即子弹进入墙壁的深度将超过 $x_1 = 0.02\text{m}$；

设子弹进入墙壁的深度为 x（$x > 0.02\text{m}$），此过程中阻力做功：$W_{Fx} = -200 + [-20000\times(x - 0.02)]$，

由动能定理：$W_{Fx} = 0 - \dfrac{1}{2}mv_0^2 \quad \Rightarrow \quad -200 + [-20000\times(x-0.02)] = -400$

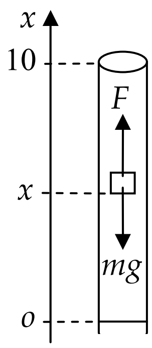
$\Rightarrow$ **子弹进入墙壁的深度**：$x = 0.03\text{m} = 3\text{cm}$.　　**本题选（A）**

4. 建立如图所示ox轴，竖直向上为x轴正方向，取水面处为坐标原点o；当桶离开水面到达位置x处时，水的质量为$m=10-0.2x$，水的重力为$mg=(10-0.2x)g$，方向竖直向下；

在拉力作用下，桶匀速上升，则在位置x处，拉力$F=mg=(10-0.2x)g$，方向竖直向上；

人的拉力做功：$W_F=\int_0^{10}Fdx=\int_0^{10}(10-0.2x)gdx=(100-0.1\times100)g=90g$，

若取$g=9.8\,\mathrm{m/s^2}$，$W_F=90g=90\times9.8=882\,\mathrm{J}$；若取$g=10\,\mathrm{m/s^2}$，$W_F=900\,\mathrm{J}$.



（第4题图）

5.（1）以弹簧原长o'处为弹性势能和重力势能的零点，

则由图**在o处重力势能：**$E_{Po}=-mgx_0$，（o点在重力势能零点下方x_0处）

又由o'点处重力势能为：$E_{Po'}=0$，则o和o'两点间的重力势能差：$E_{Po}-E_{Po'}=-mgx_0$；

在o点处弹性势能：$E_{Ko}=\frac{1}{2}kx_0^2$，（o点相对弹簧原长的形变为x_0）

又重物在o点处平衡，$mg=kx_0$ $\Rightarrow$ **在o处弹性势能：**$E_{Ko}=\frac{1}{2}kx_0^2=\frac{1}{2}mgx_0$，

又由弹簧原长o'处弹性势能：$E_{Ko'}=0$，则o和o'两点间的弹性势能差：$E_{Ko}-E_{Ko'}=\frac{1}{2}mgx_0$；

在o处总势能：$E_{Po}+E_{Ko}=-mgx_0+\frac{1}{2}mgx_0=-\frac{1}{2}mgx_0$；

（2）以平衡位置o处为弹性势能和重力势能的零点，

则由图**在o'处重力势能：**$E_{Po'}=mgx_0$，（o'点在重力势能零点上方x_0处）

由o点处重力势能为：$E_{Po}=0$，则o和o'两点间的重力势能差：$E_{Po}-E_{Po'}=-mgx_0$；（不变）

注意：空间某一点的势能大小与势能零点的选择有关，但空间两点之间的势能差与势能零点的选择无关。

同理，当o处弹性势能$E_{Ko}=0$时，o和o'两点间的弹性势能差保持不变：$E_{Ko}-E_{Ko'}=\frac{1}{2}mgx_0$，

$\Rightarrow E_{Ko'}=E_{Ko}-\frac{1}{2}mgx_0=0-\frac{1}{2}mgx_0$ $\Rightarrow$ **在o'处弹性势能：**$E_{Ko'}=-\frac{1}{2}mgx_0$；

在o'处总势能：$E_{Po'}+E_{Ko'}=mgx_0-\frac{1}{2}mgx_0=\frac{1}{2}mgx_0$.

6. 由功的定义：$W=\int_i^f\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_i^f(2y^2\vec{i}+3x\vec{j})\cdot(dx\vec{i}+dy\vec{j})=\int_i^f2y^2dx+3xdy$，

（1）由图，在路径oa上，$y=0$，$dy=0$，$0\le x\le3$，功：$W_{0a}=\int_o^a2y^2dx+3xdy=0$；

（2）在路径ab上，$x=0$，$dx=0$，$0\le y\le2$，功：$W_{ab}=\int_a^b2y^2dx+3xdy=\int_0^2(9dy)=18$；

（3）在路径ob上，$y=\frac{2}{3}x$，$dy=\frac{2}{3}dx$，$0\le x\le3$，功：$W_{ob}=\int_o^b2y^2dx+3xdy=\int_0^3(\frac{8}{9}x^2dx+2xdx)=17$；

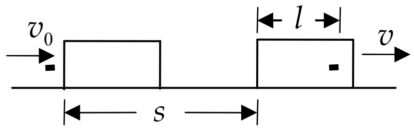
（4）在路径$ocbo$上，其中：在oc上，$x=0$，$dx=0$，$0\le y\le2$；在cb上，$y=2$，$dy=0$，$0\le x\le3$；

在bo上，$y=\frac{2}{3}x$，$dy=\frac{2}{3}dx$，$0\le x\le3$，

功：$W_{ocbo}=\int_o^c+\int_c^b+\int_b^o2y^2dx+3xdy=\int_0^20+\int_0^38dx+\int_3^0(\frac{8}{9}x^2dx+2xdx)=7$.

7.（1）在光滑水平面上，子弹和沙箱构成的系统在水平方向不受外力，系统在水平方向动量守恒。如图，设子弹和沙箱共同运动时速度大小为 v，

则 $mv_0=(m+M)v \quad\Rightarrow\quad v=\dfrac{mv_0}{m+M}$，



（第 7 题图）

子弹入射前系统的机械能：$E_1=\dfrac{1}{2}mv_0^2+0=\dfrac{1}{2}mv_0^2$，（初始沙箱静止）

子弹和沙箱共同运动时系统的机械能：$E_2=\dfrac{1}{2}(m+M)v^2=\dfrac{m^2v_0^2}{2(m+M)}$，

系统损失的机械能：$\Delta E=E_1-E_2=\dfrac{mMv_0^2}{2(m+M)}$.

（2）建立**地面参照系**，设当子弹在沙箱内移动距离为 l 时，沙箱在水平方向移动距离为 s，此时子弹和沙箱达到共同运动速度 v，如图。

沙箱对子弹的平均阻力 F 做负功：$W_{F\to 子弹}=-F(s+l)$，

子弹对沙箱的反作用力 F 做正功：$W_{F\to 沙箱}=Fs$，

由质点系动能定理，系统合外力为零时，系统内力做功之和等于质点系动能的改变：

$$W_{F\to 子弹}+W_{F\to 沙箱}=E_2-E_1 \;\Rightarrow\; -F(s+l)+Fs=-\frac{mMv_0^2}{2(m+M)} \;\Rightarrow\; -Fl=-\frac{mMv_0^2}{2(m+M)},$$

$\Rightarrow$ **子弹受到的平均阻力**：$F=\dfrac{mMv_0^2}{2(m+M)l}$.

8. （1）弹力：$F=-(4x+6x^2)$，其中负号表示弹力方向与伸长 x 的方向相反，

弹力做功：$W_F=\int_{0.5}^{1}-(4x+6x^2)dx=-3.25\text{J}$，

所以**在此过程中外力克服弹力做功为**：$W=3.25\text{J}$；

（2）由质点动能定理，弹力做功：$W_F'=\int_{1}^{0.5}-(4x+6x^2)dx=E_k-E_{k0} \quad\Rightarrow\quad 3.25\text{J}=\dfrac{1}{2}mv^2-0$，

$\Rightarrow$ **物体的速率**：$v=\dfrac{\sqrt{13}}{2}\text{m/s}=1.8\text{m/s}$.

9. 由质点动能定理：$W_{重力}+W_{阻力}=0-\dfrac{1}{2}mv_0^2 \quad\Rightarrow\quad -mgH+(-fH)=-\dfrac{1}{2}mv_0^2 \quad\Rightarrow\quad fH=\dfrac{1}{2}mv_0^2-mgH$，

$\Rightarrow$ **空气阻力**：$f=\dfrac{mv_0^2}{2H}-mg=1\text{N}$. （取 $g=10\text{m/s}^2$）

10. 已知运动方程：$\vec{r}=a\cos\omega t\vec{i}+b\sin\omega t\vec{j} \quad\Rightarrow$ 速度：$\vec{v}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}=-a\omega\sin\omega t\vec{i}+b\omega\cos\omega t\vec{j}$，

（1）在 A 点（a，0），$\begin{cases}x=a\cos\omega t=a\\ y=b\sin\omega t=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\cos\omega t=1\\ \sin\omega t=0\end{cases}$，$\Rightarrow$ **A 点速度**：$\vec{v}_A=b\omega\vec{j}$，速率：$v_A=b\omega$，

A 点动能：$E_{kA}=\dfrac{1}{2}mv_A^2=\dfrac{1}{2}mv_{Ay}^2=\dfrac{1}{2}mb^2\omega^2$；

在 B 点（0，b），$\begin{cases}x=a\cos\omega t=0\\ y=b\sin\omega t=b\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\cos\omega t=0\\ \sin\omega t=1\end{cases}$，$\Rightarrow$ **B 点速度**：$\vec{v}_B=-a\omega\vec{i}$，速率：$v_B=a\omega$，

B 点动能：$E_{kB}=\dfrac{1}{2}mv_B^2=\dfrac{1}{2}mv_{Bx}^2=\dfrac{1}{2}ma^2\omega^2$；

（2）F_x 做功：$W_{Fx}=\int_A^B F_x dx=\int_A^B ma_x dx=\int_A^B m\dfrac{dv_x}{dt}dx=\int_A^B mv_x dv_x=\dfrac{1}{2}mv_{Bx}^2-\dfrac{1}{2}mv_{Ax}^2=\dfrac{1}{2}ma^2\omega^2$；

同理，F_y 做功：$W_{Fy}=\int_A^B F_y dy=\dfrac{1}{2}mv_{By}^2-\dfrac{1}{2}mv_{Ay}^2=-\dfrac{1}{2}mb^2\omega^2$.

